SO SÁNH HAI LUỸ THỪA.

A/ KIẾN THỨC CẦN NHỚ.

* Luỹ thừa với số mũ tự nhiên: $a^n = a.a.a.a.a....a$ (n thừa số a với $a \in ¤$).

Qui ước: $a^0 = 1\ (a \neq 0)$ và $a^1 = a$.

* Các phép tính luỹ thừa:

- Nhân hai luỹ thưa cùng cơ số: $a^m.a^n = a^{m+n}$.
- Chia hai luỹ thừa cùng cơ số : $a^m : a^n = a^{m-n}\ (a \neq 0;\ m \geq n)$.
- Luỹ thừa của một tích: $(a.b)^n = a^n.b^n$.
- Luỹ thừa của một thương: $(a:b)^n = a^n : b^n (b \neq 0)$.
- Luỹ thừa của luỹ thừa: $(a^m)^n = a^{m.n}$.
- Luỹ thừa tầng: $a^{m^n} = a^{(m^n)}$

Ví dụ: $3^{2^3} = 3^8$.

- Luỹ thừa với số mũ âm: $a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}\ (a \neq 0)$

Ví dụ: $10^{-3} = \dfrac{1}{10^3}$.

B/ CÁC PHƯƠNG PHÁP SO SÁNH 2 LŨY THỪA VỚI SỐ MŨ TỰ NHIÊN.

I/ Phương pháp 1: Để so sánh hai luỹ thừa ta thường đưa về so sánh hai luỹ thừa cùng cơ số hoặc cùng số mũ .

- Nếu 2 luỹ thừa cùng cơ số:

+ Khi cơ số lớn hơn 1, thì luỹ thừa nào có số mũ lớn hơn sẽ lớn hơn:

$a^m > a^n \quad (a > 1) \Rightarrow m > n.$

+ Khi cơ số nhỏ hơn 1, thì luỹ thừa nào có số mũ lớn hơn sẽ bé hơn:

$a^m > a^n \quad (a < 1) \Rightarrow m > n.$

+ Khi cơ số bằng 1, thì hai luỹ thừa bằng nhau với mọi số mũ tự nhiên.

- Nếu 2 luỹ thừa cùng số mũ (lớn hơn 0) thì lũy thừa nào có cơ số lớn hơn sẽ lớn hơn .

$a^n > b^n \quad (n > 0) \Rightarrow a > b.$

II/ Phương pháp 2: So sánh thừa số riêng trong tích:

Xét: a^n biến đổi được về dạng: $c.d^k$

b^m biến đổi được về dạng: $e.d^k$

+ Nếu $c < e$ thì $c.d^k < e.d^k \Rightarrow a^n < b^m$.

+ Nếu $c > e$ thì $c.d^k > e.d^k \Rightarrow a^n > b^m$.

III/ Phương pháp 3: Dùng tính chất bắc cầu, tính chất đơn điệu của phép nhân:

$A > B$ và $B > C$ thì $A > C$.

$A.C < B.C$ (với $C > 0$) $\Rightarrow A < B$.

IV/ Phương pháp 4:

Xét: a^n biến đổi được về dạng: $c^q.d^k$

b^m biến đổi được về dạng: $e^p.g^h$

Nếu $c^q < e^p$ và $d^k < g^h$ thì $c^q.d^k < e^p.g^h$.

C/ CÁC DẠNG TOÁN THƯỜNG GẶP.

DẠNG 1: So sánh hai số lũy thừa.

Vận dụng các phương pháp so sánh đã nêu trong phần B để so các lũy thừa bài cho.

Ví dụ 1. So sánh các số sau đây:

a) 16^{19} và 8^{25}.

b) 27^{11} và 81^{8}.

✍ **Định hướng tư duy:** Nhận thấy, ở câu a) thì 16 và 8 là các cơ số liên quan tới lũy thừ cơ số 2, ở câu b) thì 27 và 81 liên quan tới lũy thừa cơ số 3. Do đó để so sánh, ta biến đổi các lũy thừa về các lũy thừa có cùng cơ số, rồi dựa vào so sánh số mũ để so sánh chúng với nhau.

✍ **Lời giải:**

a) $16^{19}=(2^4)^{19}=2^{76}$; $8^{25}=(2^3)^{25}=2^{75}$

Vì $2^{76}>2^{75}\Rightarrow 16^{19}>8^{25}$.

b) $27^{11}=(3^3)^{11}=3^{33}$; $81=(3^4)^8=3^{32}$

Vì $3^{33}>3^{32}\Rightarrow 27^{11}>81^{8}$.

Ví dụ 2: So sánh:

a) 3^{2n} và 2^{3n} $(n\in N^*)$.

b) 2^{100} và 3^{200}.

c) 5^{100} và 3^{500}.

✍ **Định hướng tư duy:** Nhận thấy, ở câu a) thì các lũy thừa có chung số mũ n, ở câu b) và c) thì các lũy thừa có chung số mũ 100. Do đó để so sánh, ta biến đổi các lũy thừa về các lũy thừa có cùng số mũ, rồi dựa vào so sánh cơ số để so sánh chúng với nhau.

✍ **Lời giải:**

a) $3^{2n} = \left(3^2\right)^n = 9^n ; 2^{3n} = \left(2^3\right)^n = 8^n$

Vì $9 > 8 \Rightarrow 3^2 > 2^3 => (3^2)^n > (2^3)^n$

b) $2^{100} = (2^3)^{100} = 8^{100}$ và $3^{200} = (3^2)^{100} = 9^{100}$

Vì $8^{100} < 9^{100} \Rightarrow 2^{300} < 3^{200}$.

c) $5^{300} = \left(5^3\right)^{100} = 125^{100}$ và $3^{500} = \left(3^3\right)^{100} = 243^{100}$

Vì $125^{100} < 243^{100} \Rightarrow 5^{300} < 3^{500}$.

✍ **Lời bình:** Qua hai ví dụ trên ta thấy rằng, trước khi so sánh hai lũy thừa với nhau trước hết ta cần làm hai việc sau:

+ Kiểm tra cơ số xem các cơ số có biến đổi được về cùng cơ số không.

+ Kiểm tra số mũ của các lũy thừa xem có ước chung lớn nhất không.

Việc làm này sẽ giúp chúng ta lựa chọn đúng phương pháp so sánh.

Ví dụ 3: So sánh:

a) 5^{23} và 6.5^{22}.

b) 7.2^{13} và 2^{16}.

c) 15^{12} và $81^3.125^5$.

✍ **Định hướng tư duy:** Nhận thấy trong các số lũy thừa cần so sánh thì số mũ của chúng đều không có ước chung, hoặc cơ số của chúng không thể biểu diễn dưới dạng chung một cơ số. Do đó việc đưa các lũy thừa về các lũy thừa có cùng cơ số (hoặc số mũ) để so sánh có vẻ không khả quan. Tuy nhiên các cơ số trong các lũy thừa đều có ước chung, nên việc tách lũy thừa thành tích, để xuất hiện thừa số chung rồi so sánh thừa số riêng có vẻ khả quan. Để làm được điều này ta cần dùng phương pháp sau: *Biến đổi* a^n *về dạng:* $c.d^k$, *biến đổi* b^m *về dạng:* $e.d^k$ *rồi so sánh hai số* c *và* e. *Từ đó so sánh được hai số* a^n *và* b^m.

✍ **Lời giải:**

a) Ta có: $5^{23} = 5.5^{22}$

Vì $5 < 6 \Rightarrow 5.5^{22} < 6.5^{22} \Rightarrow 5^{23} < 6.5^{22}$.

b) Ta có: $2^{16} = 2^3.12^{13} = 8.2^{13}$

Vì $7.2^{13} < 8.2^{13} \Rightarrow 2^{16} > 7.2^{13}$.

c) Ta có: $81^3.125^5 = \left(3^4\right)^3.\left(5^3\right)^5 = 3^{12}.5^{15} = \left(3.5\right)^{12}.5^3 = 15^{12}.5^3$

Vì $15^{12}.5^3 > 15^{12} \Rightarrow 81^3.125^5 > 15^{12}$.

✍ **Lời bình:** Việc phân tích lũy thừa thành tích các lũy thừa sẽ giúp ta nhìn ra thừa số chung của các lũy thừa, từ đó việc so sánh hai lũy thừa chỉ còn dựa vào việc so sánh các thừa số riêng.

Ví dụ 4: So sánh:

a) 107^{50} và 73^{75}.

b) 2^{91} và 5^{35}.

✍ **Định hướng tư duy:** Trong câu a) mặc dù số mũ của hai lũy thừa có ước chung là 25, tuy nhiên khi đó cơ số sẽ là 73^3 và 107^2, các cơ số này khi tính ra sẽ rất lớn, do đó việc đưa về so sánh hai lũy thừa cùng số mũ sẽ không khả quan. Còn trong câu b) cả số mũ và cơ số đều không có ước chung nên cũng không thể áp dụng các phương pháp trong các ví dụ trên. Như vậy chúng ta chỉ còn cách lựa chọn dùng tính chất bắc cầu (so sánh qua lũy thừa trung gian).

✍ **Lời giải:**

a) Ta có: $107^{50} < 108^{50} = (4.\ 27)^{50} = 2^{100}.\ 3^{150}$

$$73^{75} > 72^{75} = (8.\ 9)^{75} = 2^{225}.\ 3^{150}$$

Vì $2^{100} < 2^{225} \Rightarrow 2^{100}.3^{150} < 2^{225}.3^{150} \Rightarrow 107^{50} < 73^{75}$.

b) Ta có: $2^{91} > 2^{90} = (2^5)^{18} = 32^{18}$

$$5^{35} < 5^{36} = (5^2)^{18} = 25^{18}$$

Vì $32^{18} > 25^{18} \Rightarrow 2^{91} > 5^{35}$.

✍ **Lời bình:** Một trong những cách tạo ra lũy thừa trung gian trong so sánh là ta có thể tăng số mũ (hoặc tăng cơ số) thêm một đơn vị.

DẠNG 2: So sánh biểu thức lũy thừa với một số (so sánh hai biểu thức lũy thừa).

* Thu gọn biểu thức lũy thừa bằng cách vận dụng các phép tính lũy thừa, cộng trừ các số theo quy luật ......

* Vận dụng phương pháp so sánh hai lũy thừa ở phần B.

* Phương pháp so sánh phần bù:

Với $a,\ n,\ m,\ k \in N^*$. Ta có:

- Nếu $m > n$ thì $k - \frac{a}{m} > k - \frac{a}{n}$ và $k + \frac{a}{m} < k + \frac{a}{n}$.

- Nếu $m < n$ thì $k - \frac{a}{m} < k - \frac{a}{n}$ và $k + \frac{a}{m} > k + \frac{a}{n}$.

* Với biểu thức là tổng các số $\frac{1}{a^2}$ (với $a \in N^*$) ta có vận dụng so sánh sau: $\frac{1}{a} - \frac{1}{a+1} < \frac{1}{a^2} < \frac{1}{a-1} - \frac{1}{a}$

Ví dụ: Cho $S = 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + ... + 2^9$. So sánh S với 5.2^8.

✍ **Định hướng tư duy:** Trước khi so sánh biểu thức S với 5.2^8 ta cần dùng phương pháp tính tổng theo quy luật để tính S. Để làm việc này ta cần nhân 2 vào hai vế của biểu thức S, sau đó tính hiệu $2S - S$ thì sẽ triệt tiêu được các số hạng giống nhau và tính được S.

✍ **Lời giải:**

Ta có: $S = 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + ... + 2^9$

$2.S = 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + ... + 2^9 + 2^{10}$

$\Rightarrow 2.S - S = S = 2^{10} - 1$

Mà $2^{10} - 1 < 2^{10} = 2^8.2^2 = 4.2^8$

$\Rightarrow S < 5.2^8$.

✍ **Lời bình:** Để tính tổng S ta cần dùng phương pháp tính tổng của biểu thức tổng quát sau: $S = 1 + a + a^2 + a^3 + ... + a^n$ $(a \in N^*)$.

Ví dụ 2: So sánh 2 biểu thức A và B trong từng trường hợp:

a) $A = \frac{10^{15}+1}{10^{16}+1}$ và $B = \frac{10^{16}+1}{10^{17}+1}$.

b) $C=\dfrac{2^{2008}-3}{2^{2007}-1}$ và $D=\dfrac{2^{2007}-3}{2^{2006}-1}$.

Định hướng tư duy:

- Ở câu a, biểu thức A và B có chứa luỹ thừa cơ số 10, nên ta so sánh $10A$ và $10B$.

- Ở câu b, biểu thức C và D có chứa luỹ thừa cơ số 2 nên ta so sánh $\dfrac{1}{2}C$ và $\dfrac{1}{2}D$.

Lời giải:

a) Ta có:

$$A=\frac{10^{15}+1}{10^{16}+1}$$

$$\Rightarrow 10A=10.\left(\frac{10^{15}+1}{10^{16}+1}\right)=\frac{10^{16}+10}{10^{16}+1}=\frac{10^{16}+1+9}{10^{16}+1}=1+\frac{9}{10^{16}+1}.$$

$$B=\frac{10^{16}+1}{10^{17}+1}$$

$$\Rightarrow 10B=10.\left(\frac{10^{16}+1}{10^{17}+1}\right)=\frac{10^{17}+10}{10^{17}+1}=\frac{10^{17}+1+9}{10^{17}+1}=1+\frac{9}{10^{17}+1}.$$

Vì $10^{16}+1<10^{17}+1$ nên $\dfrac{9}{10^{16}+1}>\dfrac{9}{10^{17}+1}$

$$\Rightarrow 1+\frac{9}{10^{16}+1}>1+\frac{9}{10^{17}+1}$$

$\Rightarrow$ $10A>10B$ hay $A>B$.

b) Ta có:

$$C=\frac{2^{2008}-3}{2^{2007}-1}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}C=\frac{1}{2}\left(\frac{2^{2008}-3}{2^{2007}-1}\right)=\frac{2^{2008}-3}{2^{2008}-2}=\frac{2^{2008}-2-1}{2^{2008}-2}=1-\frac{1}{2^{2008}-2}.$$

$$D=\frac{2^{2007}-3}{2^{2006}-1}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}D=\frac{1}{2}\left(\frac{2^{2007}-3}{2^{2006}-1}\right)=\frac{2^{2007}-3}{2^{2007}-2}=\frac{2^{2007}-2-1}{2^{2007}-2}=1-\frac{1}{2^{2007}-2}.$$

Vì $2^{2008}-2>2^{2007}-2$ nên $\frac{1}{2^{2008}-2}<\frac{1}{2^{2007}-2}$

$$\Rightarrow 1-\frac{1}{2^{2008}-2}>1-\frac{1}{2^{2007}-2}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}C>\frac{1}{2}D \text{ hay } C>D.$$

✍ **Lời bình:** Đôi khi để so sánh hai biểu thức với nhau, ta cần biến đổi hai biểu thức về dạng tổng hai số hạng, trong đó có một số hạng chung và khi đó ta chỉ cần so sánh số hạng riêng.

DẠNG 3: Từ việc so sánh lũy thừa, tìm cơ số (số mũ) chưa biết.

* Với các số tự nhiên m, x, p và số dương a.

$+$ Nếu $a>1$ thì:

$$a^m<a^x<a^p \Rightarrow m<x<p.$$

$+$ Nếu $a<1$ thì:

$$a^m<a^x<a^p \Rightarrow m>x>p.$$

* Với các số dương a, b và số tự nhiên m, ta có:

$$a^m<b^m \Rightarrow a<b.$$

Ví dụ 1: Tìm các số nguyên n thoã mãn: $3^{64}<n^{48}<5^{72}$.

✍ **Định hướng tư duy:**

✍ **Lời giải:**

Ta giải từng bất đẳng thức $3^{64} < n^{48}$ và $n^{48} < 5^{72}$.

Ta có: $n^{48} > 3^{64} \Rightarrow \left(n^3\right)^{16} > \left(3^4\right)^{16} \Rightarrow \left(n^3\right)^{16} > 81^{16} \Rightarrow n^3 > 81$

$\Rightarrow n > 4$ (với $n \in \mathbb{Z}$) (1).

Mặt khác $n^{48} < 5^{72} \Rightarrow \left(n^2\right)^{24} < \left(5^3\right)^{24} \Rightarrow \left(n^2\right)^{24} < 125^{24} \Rightarrow n^2 < 125$

$\Rightarrow -11 \le n \le 11$ (với $n \in \mathbb{Z}$) (2).

Từ (1) và (2) $\Rightarrow 4 < n \le 11$.

Vậy n nhận các giá trị nguyên là: 5; 6; 7; 8; 9; 10; 11.

✍ **Lời bình:** Từ bài toán trên có thể thay đổi câu hỏi để được các bài toán sau:

<u>Bài số 1</u>: Tìm tổng các số nguyên n thoả mãn: $3^{64} < n^{48} < 5^{72}$.

Giải tương tự trên ta có các số nguyên n thoả mãn là:

$$5+6+7+8+9+10+11=56.$$

<u>Bài số 2</u>: Tìm tất cả các số nguyên có một chữ số sao cho: $3^{64} < n^{48} < 5^{72}$.

Giải tương tự trên ta có các số nguyên n thoả mãn là: 5; 6; 7; 8; 9.

<u>Bài số 3</u>: Tìm tất cả các số nguyên có 2 chữ số sao cho $3^{64} < n^{48} < 5^{72}$

Giải tương tự trên ta có các số nguyên n thoả mãn là: 10; 11.

Ví dụ 2: Tìm x thuộc N. Biết:

a) $16^x < 128^4$.

b) $5^x.5^{x+1}.5^{x+2} \le \underbrace{100...0}_{18\ \text{chu so}\ 0} : 2^{18}$.

Định hướng tư duy:

Lời giải:

a) $16^x < 128^4 \Rightarrow \left(2^4\right)^x < \left(2^7\right)^4 \Rightarrow 2^{4x} < 2^{28} \Rightarrow 4x < 28 \Rightarrow x < 7$

$\Rightarrow x \in \{0,1,2,3,4,5,6\}$.

b) $5^x.5^{x+1}.5^{x+2} \le \underbrace{100...0}_{18\ \text{chu so}\ 0} : 2^{18}$

$\Rightarrow 5^{3x+3} \le 10^{18} : 2^{18} \Rightarrow 5^{3x+3} \le 5^{18} \Rightarrow 3x+3 \le 18 \Rightarrow x \le 5$

$\Rightarrow x \in \{0,1,2,3,4,5\}$.

DẠNG 4: Một số bài toán khác.

Ví dụ 1: Hãy viết số lớn nhất bằng cách dùng ba chữ số 1 ; 2 ; 3 với điều kiện mỗi chữ số dùng một lần và chỉ một lần ?

Định hướng tư duy:

Lời giải:

Bài toán xảy ra các trường hợp sau:

Trường hợp 1: Không dùng luỹ thừa thì số lớn nhất viết được là 321.

Trường hợp 2: Dùng luỹ thừa để viết: (Bỏ qua trường hợp cơ số hoặc số mũ bằng 1 và các luỹ thừa tầng vì các giá trị này quá nhỏ so với 321)

* Xét các luỹ thưa có số mũ là một chữ số cho ta số tự nhiên có 4 chữ số là: $13^2, 31^2, 12^3, 21^3$, trong các số này số lớn nhất là 21^3.

* Xét các luỹ thưa mà số mũ có hai chữ số cho ta số tự nhiên có 4 chữ số là: $2^{13}, 2^{31}, 3^{12}, 3^{21}$, nhận xét các số này như sau:

$$3^{21} = 3.3^{20} = 3.(3^2)^{10} = 3.9^{10},$$

$$2^{31} = 2.2^{30} = 2(2^3)^{10} = 2.8^{10},$$

do đó trong các số này thì số lớn nhất là 3^{21}.

So sánh 3^{21} và 21^3:

$$3^{21} > 3^9 = (3^3)^3 = 27^3 > 21^3$$

Vậy số lớn nhất viết được là số 3^{21} .

Ví dụ 2:

a) Số 5^8 có bao nhiêu chữ số ?

b) Hai số 2^{2003} và 5^{2003} viết liền nhau được số có bao nhiêu chữ số?

✍ **Định hướng tư duy:** So sánh lũy thừa với một số luỹ thừa của 10, từ đó lập luận tìm số chữ số của số đó.

✍ **Lời giải:**

a) Ta có:

$$5^8 = (5^4)^2 = 625^2 > 600^2 = 360000$$

$$5^8 = \frac{10^8}{2^8} = \frac{100000000}{256} < \frac{100000000}{250} = 400000$$

$$\Rightarrow 360000 < 5^8 < 400000.$$

Do đó 5^8 có 6 chữ số.

b) Giả sử 2^{2003} có a chữ số và 5^{2003} có b chữ số thì khi viết 2 số này liền nhau ta được $(a+b)$ chữ số.

Vì $10^{a-1} < 2^{2003} < 10^a$ và $10^{b-1} < 5^{2003} < 10^b$

$$\Rightarrow 10^{a-1}.10^{b-1} < 2^{2003}.5^{2003} < 10^a.10^b$$

$$\Rightarrow 10^{a+b-2} < 10^{2003} < 10^{a+b}.$$

Do đó: $2003 = a + b - 1 \Rightarrow a + b = 2004$.

Vậy số đó có 2004 chữ số.

Ví dụ 3: Tìm số 5các chữ số của các số n và m trong các trường hợp sau:

a) $n = 8^3 .\ 15^5$.

b) $m = 4^{16} .\ 5^{25}$.

✍ **Định hướng tư duy:** Nhóm các luỹ thừa thích hợp nhằm làm xuất hiện luỹ thừa của 10, từ đó lập luận tìm số chữ số của số đó.

✍ **Lời giải:**

a) Ta có:

$$n = 8^3 .\ 15^5 = \left(2^3\right)^3 .\left(3.5\right)^5 = 2^9 .\ 3^5 .\ 5^5$$
$$= 2^4 .\ 3^5 .\left(2.5\right)^5 = 16.243\ .10^5 = 3888.\ 10^5 .$$

Số 3888.10^5 gồm 3888 theo sau là 5 chữ số 0 nên số này có 9 chữ số.

Vậy số n có 9 chữ số.

b) Ta có:

$$m = 4^{16} .\ 5^{25} = \left(2^2\right)^{16} .\ 5^{25}$$
$$= 2^{32} .5^{25} = 2^7 .\left(2^{25} .5^{25}\right) = 128.10^{25} .$$

Số 128.10^{25} gồm 128 theo sau là 25 chữ số 0 nên số này có tất cả 28 chữ số.

Vậy số m có 28 chữ số.

C/ BÀI TẬP VẬN DỤNG.

Bài tập 1. So sánh:

a) 243^5 và 3.27^5. c) 625^5 và 125^7.

Bài tập 2: So sánh:

e) 99^{20} và 9999^{10}. b) 3^{500} và 7^{300}.

d) 202^{303} và 303^{202}. e) 11^{1979} và 37^{1320}.

Bài 3: So sánh:

c) 8^5 và 3.4^7. f) 10^{10} và 48.50^5.

i) $2^{30}+3^{30}+4^{30}$ và 3.24^{10}. g) $1990^{10}+1990^9$ và 1991^{10}.

Bài 4: So sánh các số sau: 199^{20} và 2003^{15}.

Bài 5: So sánh:

a) $78^{12}-78^{11}$ và $78^{11}-78^{10}$.

b) $A=72^{45}-72^{44}$ và $B=72^{44}-72^{43}$.

Bài 6: So sánh các số sau: 3^{39} và 11^{21}.

Bài 7. Chứng tỏ rằng: $5^{27}<2^{63}<5^{28}$.

Bài 8: Chứng minh rằng: $2^{1995}<5^{863}$.

Bài 9: Chứng minh rằng: $2^{1999}<7^{714}$.

Bài 10. So sánh: 3^{200} và 2^{300}.

Bài 11: So sánh: 71^{50} và 37^{75}.

Bài 12: So sánh các số:

a) 50^{20} và 2550^{10}.

b) 999^{10} và 999999^5.

Bài 13: Viết theo từ nhỏ đến lớn: $2^{100};3^{75}$ và 5^{50}.

Bài 14: So sánh 2 số: 1234^{56789} và 56789^{1234}.

Bài 15: Gọi m là số các số có 9 chữ số mà trong cách ghi của nó không có chữ số 0. Hãy so sánh m với 10.9^8.

Bài 16: Cho $A = 1 + 2012 + 2012^2 + 2012^3 + 2012^4 + \ldots + 2012^{71} + 2012^{72}$ và $B = 2012^{73} - 1$. So sánh A và B.

Bài 17: So sánh hai biểu thức: $B = \dfrac{3^{10}.11 + 3^{10}.5}{3^9.2^4}$ và $C = \dfrac{2^{10}.13 + 2^{10}.65}{2^8.104}$.

Bài 18: So sánh: $M = \dfrac{3}{8^3} + \dfrac{7}{8^4}$ và $N = \dfrac{7}{8^3} + \dfrac{3}{8^4}$.

Bài 19: So sánh M và N biết: $M = \dfrac{19^{30} + 5}{19^{31} + 5}$ và $N = \dfrac{19^{31} + 5}{19^{32} + 5}$.

Bài 20: So sánh $\dfrac{1}{101^2} + \dfrac{1}{102^2} + \dfrac{1}{103^2} + \dfrac{1}{104^2} + \dfrac{1}{105^2}$ và $\dfrac{1}{2^2.3.5^2.7}$.

Bài 21: So sánh $A = \left(\dfrac{1}{2^2} - 1\right).\left(\dfrac{1}{3^2} - 1\right).\left(\dfrac{1}{4^2} - 1\right)......\left(\dfrac{1}{100^2} - 1\right)$ và $-\dfrac{1}{2}$.

Bài 22: Tìm các số tự nhiên n sao cho:

a) $3 < 3^n \le 234$.

b) $8.16 \ge 2^n \ge 4$.

Bài 23: Tìm số tự nhiên n biết rằng: $4^{15}.\, 9^{15} < 2^n.\, 3^n < 18^{16}.\, 2^{16}$.

Bài 24: Cho $A = 3 + 3^2 + 3^3 + \ldots. + 3^{100}$. Tìm số tự nhiên n, biết $2A + 3 = 3^n$.

Bài 25: Tìm các số nguyên dương m và n sao cho: $2^m - 2^n = 256$.

Bài 26: Tìm số nguyên dương n biết:

a) $64 < 2^n < 256$.

b) $243 > 3^n \ge 9$.

Bài 27: Tìm số nguyên n lớn nhất sao cho: $n^{200} < 6^{300}$.

Bài 28: Tìm $n \in N$ biết:

a) $32 < 2^n < 512$.

b*) $3^{18} < n^{12} \le 20^8$.

D/ HƯỚNG DẪN GIẢI.

Bài 1.

Định hướng tư duy: Nhận thấy, ở câu a) thì 243 và 27 là các cơ số liên quan tới lũy thừ cơ số 3, ở câu b) thì 625 và 125 liên quan tới lũy thừa cơ số 5. Do đó để so sánh, ta biến đổi các lũy thừa về các lũy thừa có cùng cơ số, rồi dựa vào so sánh số mũ để so sánh chúng với nhau.

Lời giải:

a) Ta có: $243^5 = \left(3^5\right)^5 = 3^{25}$; $3.27^5 = 3.\left(3^3\right)^5 = 3.3^{15} = 3^{16}$

Vì $3^{16} < 3^{25} \Rightarrow 3.27^5 < 243^5$.

b) $625^5 = (5^4)^5 = 5^{20}; 125 = (5^3)^7 = 5^{21}$

Vì $5^{21} > 5^{20} \Rightarrow 125^7 > 625^5$.

Bài tập 2:

Định hướng tư duy: Nhận thấy, ở câu a) thì các lũy thừa có chung số mũ 10, ở câu b) thì các lũy thừa có chung số mũ 100, ở câu c) thì các lũy thừa có chung số mũ 101, ở câu d) các lũy thừa có chung số mũ 660. Do đó để so sánh, ta biến đổi các lũy thừa về các lũy thừa có cùng số mũ, rồi dựa vào so sánh cơ số để so sánh chúng với nhau.

Lời giải:

a) Ta thấy: $99^{20} = \left(99^2\right)^{10} = \left(99.99\right)^{10}; 9999^{10} = \left(99.101\right)^{10}$

Vì $\left(99.99\right)^{10} < \left(99.101\right)^{10} \Rightarrow 99^{20} < 9999^{10}$.

b) Ta có : $3^{500} = \left(3^5\right)^{100} = 243^{100}$, $7^{300} = \left(7^3\right)^{100} = 343^{100}$.

Vì $243^{100} < 343^{100}$ nên $3^{500} < 7^{300}$.

c) Ta có:

$$202^{303} = \left(2.101\right)^{3.101} = \left(2^3.101^3\right)^{101} = \left(8.101.101^2\right)^{101} = \left(808.101\right)^{101}$$

$$303^{202} = \left(3.101\right)^{2.101} = \left(3^2.101^2\right)^{101} = \left(9.101^2\right)^{101}$$

Vì $808.101^2 > 9.101^2$ nên $202^{303} > 303^{202}$.

d) Ta có:

$$11^{1979} < 11^{1980} = \left(11^3\right)^{660} = 1331^{660} \qquad (1)$$

$$37^{1320} = \left(37^2\right)^{660} = 1369^{660} \qquad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra: $11^{1979} < 37^{1320}$.

Bài 3:

a) Ta có: $8^5 = 2^{15} = 2.2^{14}$, $3.4^7 = 3.2^{14}$

Vì $2 < 3 \Rightarrow 2.2^{14} < 3.2^{14} \Rightarrow 8^5 < 3.4^7$.

b) Ta có :

$$10^{10} = 2^{10}.\ 5^{10} = 2.\ 2^9.\ 5^{10},\ 48.\ 50^5 = \left(3.\ 2^4\right).\ \left(2^5.\ 5^{10}\right) = 3.\ 2^9.\ 5^{10}$$

Vì $2 < 3 \Rightarrow 2.\ 2^9.\ 5^{10} < 3.\ 2^9.\ 5^{10} \Rightarrow 10^{10} < 48.\ 50^5$.

c) Ta có: $4^{30} = (2^2)^{30} = (2.2)^{30} = 2^{30}.2^{30} = (2^3)^{10}.(2^2)^{15} = 8^{10}.4^{15}$,

$$24^{10}.3 = (8.3)^{10}.3 = 8^{10}.3^{10}.3 = 8^{10}.3^{11}$$

Vì $3^{11} < 4^{15} \Rightarrow 8^{10}.3^{11} < 8^{10}.4^{15} \Rightarrow 4^{30} > 3.24^{10}$

$\Rightarrow 2^{30} + 3^{30} + 4^{30} > 3.24^{10}$.

d) Ta có :

$1990^{10} + 1990^{9} = 1990^{9}.(1990+1) = 1991.\ 1990^{9}$

$1991^{10} = 1991.\ 1991^{9}$

Vì $1990^{9} < 1991^{9}$ nên $1990^{10} + 1990^{9} < 1991^{10}$.

Bài 4:

Biến đổi a^n về dạng: $c.d^k$, biến đổi b^m về dạng: $e.d^k$ rồi so sánh hai số c và e. Từ đó so sánh được hai số a^n và b^m.

$199^{20} < 200^{20} = (8.25)^{20} = (2^3.5^2)20 = (2^3.5^2)^{20} = 2^{60}.5^{40}$

$2003^{15} > 2000^{15} = (16.125)^{15} = (2^4.5^3)^{15} = (2^4.5^3)^{15} = 2^{60}.5^{45}$

Vì $5^{45} > 5^{40} \Rightarrow 2^{60}.5^{45} > 2^{60}.5^{40} \Rightarrow 2003^{15} > 199^{20}$.

Bài 5:

Biến đổi a^n về dạng: $c.d^k$, biến đổi b^m về dạng: $e.d^k$ rồi so sánh hai số c và e. Từ đó so sánh được hai số a^n và b^m.

a) Ta có: $78^{12} - 78^{11} = 78^{11}.(78-1) = 78^{11}.77$

$78^{11} - 78^{10} = 78^{10}.(78-1) = 78^{10}.77$

Vì $78^{11} > 78^{10} \Rightarrow 78^{11}.77 > 78^{10}.77 \Rightarrow 78^{12} - 78^{11} > 78^{11} - 78^{10}$.

b) Ta có

$A = 72^{44}(72-1) = 72^{44}.71$ và $B = 72^{43}(72-1) = 72^{43}.71$

$72^{44} > 72^{43} \Rightarrow 72^{44}.71 > 72^{43}.71 \Rightarrow A > B$.

Bài 6:

Dùng tính chất bắc cầu: So sánh hai số với số lũy thừa 10.

Ta có: $3^{39} < 3^{40} = (3^4)^{10} = 81^{10}$

$11^{20} = (11^2)^{10} = 121^{10} < 11^{21}$

Vì $81^{10} < 121^{10} \Rightarrow 3^{39} < 11^{21}$.

Bài 7.

Với bài này , học sinh lớp 6 sẽ không định hướng được cách làm , giáo viên có thể gợi ý học sinh so sánh: $2^{63} > 5^{27}$ *và* $2^{63} < 5^{28}$.

Ta có : $2^{63} = \left(2^7\right)^9 = 128^9$, $5^{27} = \left(5^3\right)^9 = 125^9 \Rightarrow 2^{63} > 5^{27}$ (1)

Lại có: $2^{63} = \left(2^9\right)^7 = 512^7$, $5^{28} = \left(5^4\right)^7 = 625^7 \Rightarrow 2^{63} < 5^{28}$ (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow 5^{27} < 2^{63} < 5^{2}$.

Bài 8:

Xét: a^n *biến đổi được về dạng:* $c^q.\mathrm{d}^k$

b^m *biến đổi được về dạng:* $e^p.\mathrm{g}^h$

Nếu $c^q < e^p$ *và* $d^k < g^h$ *thì* $c^q.\mathrm{d}^k < e^p.\mathrm{g}^h$.

Ta có: $2^{1995} = 2^{1990}.2^5$; $5^{863} = 5^{860}.5^3$

Nhận xét: $2^5 = 32 < 5^3 = 125$ nên cần so sánh 2^{1990} và 5^{860}.

Có: $2^{10} = 1024$, $5^5 = 3025 \Rightarrow 2^{10}.\ 3 < 5^5 \Rightarrow 2^{1720}.\ 3^{172} < 5^{860}$.

Có: $2^{1990} = 2^{1720}.2^{270}$, cần so sánh $2^{1720}.2^{270}$ với số $2^{1720}.3^{172}$ như sau:

$3^7 = 2187$; $2^{11} = 2048 \Rightarrow 3^7 > 2^{11}$.

$3^{172} = \left(3^7\right)^{24}.\ 3^4 > \left(2^{11}\right)2^4 > \left(2^{11}\right).\ 2^6 = 2^{270}$.

Do đó: $2^{1720}.2^{270} < 2^{1720}.\ 3^{172} < 5^{860} \Rightarrow 2^{1990} < 5^{860}$

Mà $2^5 < 5^3 \Rightarrow 2^{1995} < 5^{863}$.

Bài 9:

Ta có: $2^{10} = 1025$; $7^3 = 343$

$$\Rightarrow 2^{10} < 3.7^3 \Rightarrow \left(2^{10}\right)^{238} < 3^{238}.\left(7^3\right)^{238}$$

$$\Rightarrow 2^{2380} < 3^{238}.7^{714} \qquad (1)$$

Xét: $3^{238} = 3^3.3^{235} = 3^3.\left(3^5\right)^{47} < 3^3\left(2^8\right)^{47} < 2^5.2^{376} = 2^{381}$ (vì $3^5 < 2^8$)

$$\Rightarrow 3^{238} < 2^{381} \qquad (2)$$

Từ (1) và (2), ta có: $2^{2380} < 2^{381}.7^{714}$

$$\Rightarrow 2^{1999} < 7^{714}$$

Bài 10.

Đưa về so sánh hai lũy thừa cùng số mũ.

Ta có: $3^{200} = \left(3^2\right)^{100} = 9^{100}$; $2^{300} = \left(2^3\right)^{100} = 8^{100}$ mà $8^{100} < 9^{100}$

$$\Rightarrow 2^{300} < 3^{200}.$$

Bài 11:

Biến đổi a^n về dạng: $c.\mathrm{d}^k$, biến đổi b^m về dạng: $e.d^k$ rồi so sánh hai số c và e. Từ đó so sánh được hai số a^n và b^m.

Ta có: $71^{50} < 72^{50} = \left(8.9\right)^{50} = 2^{150}.3^{100}$ (1)

$$37^{75} > 36^{75} = \left(4.9\right)^{75} = 2^{150}.\ 3^{150} \qquad (2)$$

Mà $2^{150}.\ 3^{150} > 2^{150}.3^{100}$ (3)

Từ (1), (2), và (3) suy ra: $37^{75} > 71^{50}$.

Bài 12:

a) Ta có: $50^{20}=\left[(50)^2\right]^{10}=2500^{10}<2550^{10}\Rightarrow 5^{20}<2550^{10}$.

b) Ta có: $999^{10}=\left[(999)^2\right]^5<998001^5<999999^5\Rightarrow 999^{10}<999999^5$.

Bài 13:

$2^{100}=(2^2)^{50}=4^{50}<5^{50}$ (1).

$3^{75}=(3^3)=27^{25}=3^{75}>5^{50}$ (2).

$5^{50}=(5^5)^{25}=25^{25}$ (3).

Từ(1),(2) và (3) $\Rightarrow 2^{100}<5^{50}<3^{75}$.

Bài 14:

Ta có: $A=1234^{56789}>1000^{50000}=\left(10^3\right)^{50000}=10^{150000}$

$B=56789^{1234}<100000^{2000}=\left(10^5\right)^{2000}=10^{10000}$

Vì $10^{10000}<10^{150000}\Rightarrow 56789^{1234}<1234^{56789}$.

Bài 15:

Số có 9 chữ số là $\overline{a_1a_2....a_8a_9}$ trong đó các chữ số $a_i\neq 0$ $(i=\overline{1;9})$ và có thể giống nhau. Từ tập hợp số $\{1;2;3;4;5;6;7;8;9\}$ mỗi chữ số a_i có 9 cách chọn . Do đó ta có số các số có 9 chữ số thỏa mãn bài toán là $m=9^9$ số.

Từ đó: $m=9^9=9.9^8<10.9^8$.

Bài 16:

Ta có: $\mathrm{A}=1+2012+2012^2+2012^3+2012^4+\ldots+2012^{71}+2012^{72}$

$2012.\mathrm{A}=2012+2012^2+2012^3+2012^4+\ldots+2012^{71}+2012^{73}$

$$\Rightarrow 2012.A - A = 2011A = 2012^{73} - 1$$

$$\Rightarrow A = \left(2012^{73} - 1\right) : 2011 < 2012^{73} - 1.$$

Vậy $A < B$.

Bài 17:

$$B = \frac{3^{10}.11 + 3^{10}.5}{3^9.2^4} = \frac{3^{10}(11+5)}{3^9.16} = 3.$$

$$C = \frac{2^{10}.13 + 2^{10}.65}{2^8.104} = \frac{2^{10}(13+65)}{2^8.104} = \frac{2^2.78}{104} = 3.$$

Vậy $B = C$.

Bài 18:

Ta có: $\frac{3}{8^3} + \frac{7}{8^4} = \frac{3}{8^3} + \frac{3}{8^4} + \frac{4}{8^4} = \left(\frac{3}{8^3} + \frac{3}{8^4}\right) + \frac{4}{8^4}.$

$$\frac{7}{8^3} + \frac{3}{8^4} = \frac{3}{8^3} + \frac{4}{8^3} + \frac{3}{8^4} = \left(\frac{3}{8^3} + \frac{3}{8^4}\right) + \frac{4}{8^3}.$$

Vì $\frac{4}{8^4} < \frac{4}{8^3} \Rightarrow \left(\frac{3}{8^3} + \frac{3}{8^4}\right) + \frac{4}{8^4} < \left(\frac{3}{8^3} + \frac{3}{8^4}\right) + \frac{4}{8^3}$

$$\Rightarrow M < N.$$

Bài 19:

$M = \frac{19^{30} + 5}{19^{31} + 5}$ nên $19M = \frac{19.(19^{30} + 5)}{19^{31} + 5} = \frac{19^{31} + 95}{19^{31} + 5} = 1 + \frac{90}{19^{31} + 5}.$

$N = \frac{19^{31} + 5}{19^{32} + 5}$ nên $19N = \frac{19.(19^{31} + 5)}{19^{32} + 5} = \frac{19^{32} + 95}{19^{32} + 5} = 1 + \frac{90}{19^{32} + 5}.$

Vì $\frac{90}{19^{31} + 5} > \frac{90}{19^{32} + 5}$

$$1+\frac{90}{19^{31}+5}>1+\frac{90}{19^{32}+5} \text{ hay } 19M>19N \Rightarrow M>N.$$

Bài 20:

Nếu n là số tự nhiên lớn hơn 1 thì ta có:

$$\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}=\frac{n-(n-1)}{(n-1).n}=\frac{n-n+1}{(n-1).n}=\frac{1}{(n-1)n}>\frac{1}{n^2}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{n^2}<\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}.$$

Áp dụng vào bài toán ta được:

$$\frac{1}{101^2}<\frac{1}{100}-\frac{1}{101}$$
$$\frac{1}{102^2}<\frac{1}{101}-\frac{1}{102}$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\frac{1}{105^2}<\frac{1}{104}-\frac{1}{103}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{101^2}+\frac{1}{102^2}+\ldots+\frac{1}{105^2}<\frac{1}{100}-\frac{1}{105}$$

$$=\frac{105-100}{100.105}=\frac{5}{2^2.5^2.5.3.7}=\frac{1}{2^2.5^2.3.7}.$$

Vậy $\frac{1}{102^2}+\ldots\ldots+\frac{1}{105^2}<\frac{1}{2^2.5^2.3.7}$.

Bài 21:

A là tích của 99 số âm. Do đó:

$$-A=\left(1-\frac{1}{4}\right)\left(1-\frac{1}{9}\right)\left(1-\frac{1}{16}\right)\ldots\ldots\left(1-\frac{1}{100^2}\right)$$

$$=\frac{3}{2^2}.\frac{8}{3^2}.\frac{15}{4^2}\ldots\ldots\frac{9999}{100^2}$$

$$=\frac{1.3}{2^2}.\frac{2.4}{3^2}.\frac{3.5}{4^2}........\frac{99.101}{100^2}.$$

Để dễ rút gọn ta viết tử dưới dạng tích các số tự nhiên liên tiếp như sau:

$$-A=\frac{1.2.3.4.5.6..........98.99}{2.3.4.5.........99.100}.\frac{3.4.5..........100.101}{2.3.4..........99.100}=\frac{1}{100}.\frac{101}{2}=\frac{101}{200}>\frac{1}{2}$$

Vậy $A<-\frac{1}{2}$.

Bài 22:

Đưa các số về các lũy thừa có cùng cơ số .

a) $3<3^n\le 234\Rightarrow 3^1<3^n\le 3^5\Rightarrow 1<n\le 5$

$\Rightarrow n$ nhận các giá trị là: $2,\ 3,\ 4,\ 5$.

b) $8.16\ge 2^n\ge 4\Rightarrow 2^3.2^4\ge 2^n\ge 2^2\Rightarrow 2^7\ge 2^n\ge 2^2\Rightarrow 7\ge n\ge 2$

$\Rightarrow n$ nhận các giá trị là: $2,3,4,5,6,7$.

Bài 23:

$4^{15}.\ 9^{15}<2^n.\ 3^n<18^{16}.\ 2^{16}\Rightarrow (4.9)^{15}<(2.3)^n<(18.2)^{16}$

$\Rightarrow 36^{15}<6^n<36^{16}$

$\Rightarrow (6^2)^{15}<6^n<(6^2)^{16}$

$\Rightarrow 6^{30}<6^n<6^{32}$

$\Rightarrow 30<n<32$

$\Rightarrow n=31.$

Bài 24:

Có $A=3+3^2+3^3+....+3^{100}$

$\Rightarrow 3A = 3^2 + 3^3 + 3^4 + \ldots + 3^{101}$

$\Rightarrow 3A - A = 2A = 3^{101} - 3$

$\Rightarrow 2A + 3 = 3^{101}$

Mà theo đề bài ta có $2A + 3 = 3^n$

$\Rightarrow 3^{101} = 3^n \Rightarrow n = 101$.

Bài 25:

Ta có: $2^m - 2^n = 256 = 2^8 \Rightarrow 2^n(2^{m-n} - 1) = 2^8$ (1).

Dễ thấy $m \neq n$, ta xét 2 trường hợp:

Trường hợp 1: Nếu $m - n = 1$ thì từ (1) ta có:

$2^n.(2-1) = 2^8 \Rightarrow 2^n = 2^8 \Rightarrow n = 8$ và $m = 9$.

Trường hợp 2: Nếu $m - n \geq 2$

$\Rightarrow 2^{m-n} - 1$ là một số lẻ lớn hơn 1 nên vế trái của (1) chứa thừa số nguyên tố lẻ khi phân tách ra thừa số nguyên tố, còn vế phải của (1) chỉ chứa thừa số nguyên tố 2, do đó hai vế của (1) mâu thuẫn nhau.

Vậy $n = 8$ và $m = 9$ là đáp số duy nhất.

Bài 26:

a) Ta có: $64 < 2^n < 256 \Rightarrow 2^6 < 2^n < 2^8 \Rightarrow 6 < n < 8$, mà n nguyên dương, nên $n = 7$.

b) Ta có: $243 > 3^n \geq 9 \Rightarrow 3^5 > 3^n \geq 3^2 \Rightarrow 5 > n \geq 2$, mà n nguyên dương nên n nhận các giá trị là: 4; 3; 2.

Bài 27:

Ta có: $n^{200} = \left(n^2\right)^{100}$; $6^{300} = \left(6^3\right)^{100} = 216^{100}$

$$n^{200} < 6^{300} \Rightarrow \left(n^2\right)^{100} < 216^{100} \Rightarrow n^2 < \ 216 \ \ (*)$$

$\Rightarrow$ Số nguyên lớn nhất thoã mãn (*) là $n = 14$.

Bài 28:

a) Với $n \in N$, ta xét:

$$32 < 2^n \Leftrightarrow 2^5 < 2^n \Rightarrow 5 < n$$

$$2^n < 512 \Leftrightarrow 2^n < 2^9 \Rightarrow n < 9$$

Do đó: $5 < n < 9 \Rightarrow n \in \{6;7;8\}$.

b) Với $n \in N$, ta xét:

$$3^{18} < n^{12} \Leftrightarrow \left(3^3\right)^6 < \left(n^2\right)^6 \Leftrightarrow 3^3 < n^2 \Leftrightarrow 27 < n^2$$

Nhận thấy: $5^2 < 27 < 6^2$, nên $6^2 \le n^2 \Rightarrow 6 \le n$.

$$n^{12} \le 20^8 \Leftrightarrow \left(n^3\right)^4 < \left(20^2\right)^4 \Leftrightarrow n^3 < 20^2 \Leftrightarrow n^3 < 400$$

Nhận thấy: $7^3 < 400 < 8^3$, nên $n^3 \le 7^3 \Rightarrow n \le 7$

Do đó: $6 \le n \le 7 \Rightarrow n \in \{6;7\}$.