DIỆN TÍCH ĐA GIÁC VÀ PHƯƠNG PHÁP SỬ DỤNG DIỆN TÍCH TRONG CHỨNG MINH

I. NỘI DUNG KIẾN THỨC CƠ BẢN CẦN NHỚ:

1. Đa giác lồi.

2. Đa giác đều

3. Tổng các góc trong đa giác n cạnh là (n – 2). 180^0

4. Số đường chéo của một đa giác n cạnh là $\frac{(n-3).n}{2}$

5. Tổng các góc ngoài của một đa giác n cạnh là 360^0

6. Trong một đa giác đều, giao điểm O của hai đường phân giác của hai góc là tâm của đa giác đều. Tâm O cách đều các đỉnh, cách đều các cạnh của đa giác đều, có một đường tròn tâm O đi qua các đỉnh của đa giác đều gọi là đường tròn ngoại tiếp đa giác đều.

7. Diện tích tam giác:

$S = \frac{1}{2}a.h$ (a: cạnh đáy; h: chiều cao tương ứng)

$S = \frac{1}{2}a.b.\sin C$ (a = AB; b = CA)

8. Diện tích hình chữ nhật

S = ab

9. Diện tích hình vuông

$S = a^2$

10. Diện tích hình bình hành

S = ah (h là chiều cao kẻ từ một đỉnh đến cạnh a)

11. Diện tích hình thoi

$S = \frac{1}{2}AC.BD$ (AC; BD là hai đường chéo)

12. Diện tích hình thang

$S = \frac{1}{2}(AB+CD).AH$ (AB, CD là hai đáy; AH: chiều cao)

13. Một số kết quả cần nhớ

a). $S_{ABM} = S_{ACM}$ (AM là trung tuyến tam giác ABC)

b). AA’ // BC => $S_{ABC} = S_{A'BC}$

c). $\frac{S_{ABD}}{S_{DBC}} = \frac{BD}{CD}$ (D thuộc BC của tam giác ABC)

d) $\frac{S_{ABD}}{S_{DBC}} = \frac{AH}{DK}$ (AH; DK là đường cao của tam giác ABC và DBC)

e) $\frac{S_{AMN}}{S_{ABC}} = \frac{AM}{AB}.\frac{AN}{AC}$ (M thuộc BC; N thuộc AC của tam giác ABC)

II. PHƯƠNG PHÁP DIỆN TÍCH: Sử dụng công thức tính diện tích để thiết lập mối quan hệ về độ dài của các đoạn thẳng

- Ta đã biết một số công thức tính diện tích của đa giác như công thức tính diện tích hình tam giác, hình thang, hình bình hành, hình chữ nhật, hình thoi ….. khi biết độ dài của một số yếu tố ta có thể tính được diện tích của những hình ấy. Ngược lại nếu biết quan hệ diện tích của hai hình chẳng hạn biết diện tích của hai tam giác bằng nhau và có hai đáy bằng nhau thì suy ra được các chiều cao tương ứng bằng nhau. Như vậy các công thức diện tích cho ta các quan hệ về độ dài của các đoạn thẳng. Sử dụng các công thức tính diện tích các hình có thể giúp ta so sánh độ dài các đoạn thẳng.

- Để so sánh độ dài các đoạn thẳng bằng phương pháp diện tích, ta có thể làm theo các bước sau:

1. Xác định quan hệ diện tích giữa các hình

2. Sử dụng các công thức diện tích để biểu diễn mối quan hệ đó bằng một đẳng thức có chứa các độ dài.

3. Biến đổi các đẳng thức vừa tìm được ta có quan hệ về độ dài giữa hai đoạn thẳng cần so sánh.

Ví dụ 1:

Cho tam giác đều ABC. Từ điểm O ở trong tam giác ta vẽ $OH \perp AB$; $OI \perp BC$; $OK \perp CA$. Chứng minh rằng khi O di động trong tam giác thì tổng OH + OI + OK không đổi.

Giải

Gọi độ dài mỗi cạnh của tam giác đều là a, chiều cao h

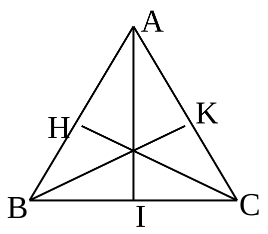
Ta có:

$S_{AOB} + S_{BOC} + S_{COA} = S_{ABC}$

$\frac{1}{2}a.OH + \frac{1}{2}a.OI + \frac{1}{2}a.OK = \frac{1}{2}a.h$

$\frac{1}{2}a(OH + OI + OK) = \frac{1}{2}a.h$

$\Rightarrow (OH + OI + OK) = h$ (không đổi)



Nhận xét :

- Có thể giải ví dụ trên bằng cách khác nhưng không thể ngắn gọn bằng phương pháp diện tích như đã trình bày.
- Bài toán trên vẫn đúng nếu O thuộc cạnh của tam giác đều
- Nếu thay tam giác đều bởi một đa giác bất kỳ thì tổng các khoảng cách từ O đến cách cạnh cũng không thay đổi.

Ví dụ 2:

Chứng minh định lý Pitago: Trong một tam giác vuông, bình phương của cạnh huyền bằng tổng bình phương hai cạnh góc vuông:

Giải:

- Dựng ra phía ngoài ΔABC các hình vuông BCDE; ABFG; ACMN
- Muốn chứng minh $BC^2 = AB^2 + AC^2$ ta phải chứng minh $S_{BCDE} + S_{ABFG} = S_{ACMN}$
- Vẽ đường cao AH kéo dài cắt DE tại K. ta sẽ chứng minh $S_{ABFG} = S_{BHKE}$ và $S_{ACMN} = S_{CHKD}$
- Nối AE; CF

$\Delta FBC = \Delta ABE$ (c-g-c) $\Rightarrow S_{FBC} = S_{ABE}$ (1)

ΔFBC và hình vuông ABFG có chung đáy BF, đường cao ứng với đáy này bằng nhau (là AB)

$\Rightarrow S_{FBC} = \frac{1}{2}S_{ABFG}$ (2)

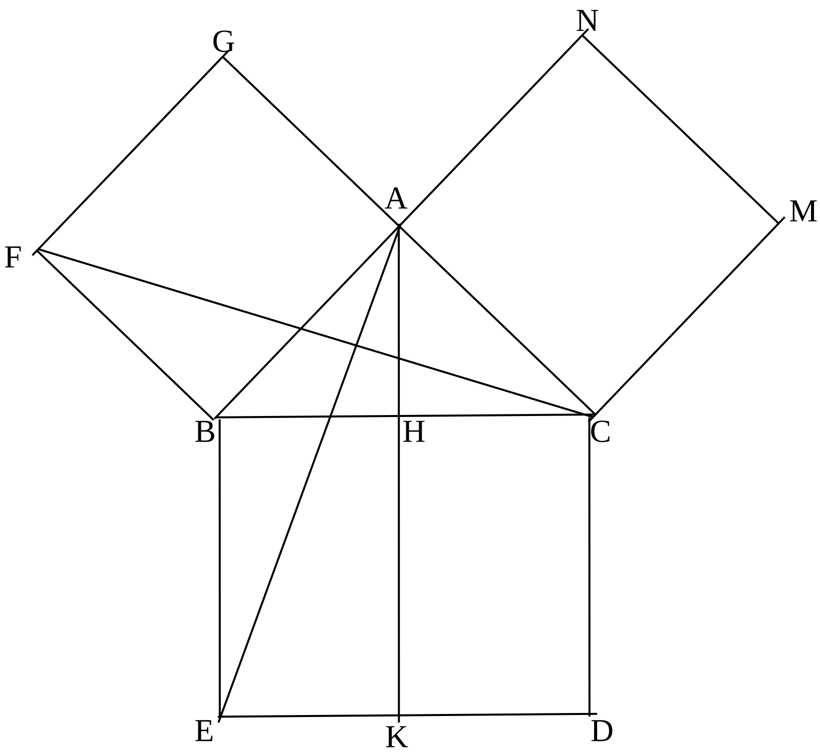
Tương tự: $\Rightarrow S_{ABE} = \frac{1}{2}S_{BHKE}$ (3)

Từ (1); (2) và (3) $\Rightarrow S_{BHKE} = S_{ABFG}$

Chứng minh tương tự ta được: $S_{CHKD} = S_{ACMN}$

Do đó: $S_{BHKE} + S_{CHKD} = S_{ABFG} + S_{ACMN}$

$S_{BCDE} = S_{ABFG} + S_{ACMN}$ (đpcm)



Nhận xét:

- Điểm mấu chốt trong cách giải trên là vẽ hình phụ: vẽ thêm ba hình vuông.

Ta phải chứng minh: $BC^2 = AB^2 + AC^2$ mà BC^2; AB^2; AC^2 chính là diện tích của các hình vuông có cạnh lần lượt là BC; AB; AC.

- Để chứng minh $S_{BCDE=}S_{ABFG} + S_{ACMN}$ ta vẽ đường cao AH rồi kéo dài để chia hình vuông BCDE thành hai hình chữ nhật không có điểm trong chung rồi chứng minh hai hình chữ nhật này có diện tích lần lượt bằng diện tích của hai hình vuông kia.

Bài tập áp dụng: (Khoảng 5 bài tập)

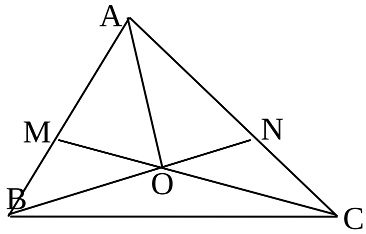
III. TÍNH DIỆN TÍCH ĐA GIÁC BẰNG PHƯƠNG PHÁP ĐẠI SỐ

- Đặt các diện tích cần tìm bởi các ẩn rồi đưa về phương trình hoặc hệ phương trình với các ẩn đó.
- Giải phương trình hoặc hệ phương trình để tìm nghiệm

Ví dụ 1:

Cho ΔABC có diện tích bằng đơn vị, trên cạnh AB lấy M và trên AC lấy N sao cho AM = 3BM. BN cắt CM ở O. Tính diện tích của ΔAOB và ΔAOB

Giải:



Đặt $S_{AOB} = x$; $S_{AOC} = y$

(x,y > 0)

Ta có: $\dfrac{S_{OAM}}{S_{OAB}} = \dfrac{3}{4}$ (vì $\dfrac{AM}{AB} = \dfrac{3}{4}$)

$\Rightarrow S_{OAM} = \dfrac{3x}{4}$

Vì $\dfrac{AN}{AC} = \dfrac{4}{5}$ nên $\dfrac{S_{OAN}}{C} = \dfrac{AN}{AC} = \dfrac{4}{5}$

$\Rightarrow S_{OAN} = \frac{4y}{5}$

Ta có: $S_{BAN} = S_{BAO} + S_{OAN} = x + \frac{4y}{5}$

mà $S_{BAN} = \frac{4}{5} S_{ABC} = \frac{4}{5}$ nên $x + \frac{4y}{5} = \frac{4}{5}$ (1)

mặt khác: $S_{CAM} = S_{COA} + S_{OAM} = y + \frac{3x}{4}$

mà: $S_{CAM} = \frac{3}{4} S_{ABC} = \frac{3}{4}$

do đó: $y + \frac{3x}{4} = \frac{3}{4}$ (2)

Từ (1) và (2) ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} 5x + 4y = 4 & (3) \\ 3x + 4y = 3 & (4) \end{cases}$$

Lấy (3) trừ (4) theo từng vế ta được $x = \frac{1}{2}$

Thay $x = \frac{1}{2}$ vào (3) ta được $x = \frac{3}{8}$

Vậy $S_{AOB} = \frac{1}{2}$ và $S_{AOC} = \frac{3}{8}$

Ví dụ 2:

Giả sử MNPQ là hình vuông nội tiếp tam giác ABC, với $M \in AB; N \in AC$ và $P; Q \in BC$. Tính cạnh hình vuông biết BC = a và đường cao AH = h

Giải:

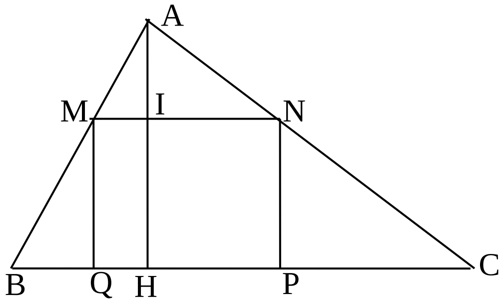
Gọi I là giao điểm của AH với MN. Đặt cạnh hình vuông MNPQ là x (x > 0),

Ta có:

$S_{AMN} = \frac{1}{2} MN.AI = \frac{1}{2} x(h - x)$

$S_{BMNC} = \frac{1}{2}(BC + MN)MQ = \frac{1}{2}(a + x)x$

$S_{ABC} = \frac{1}{2} a.h$



Ta lại có: $S_{ABC} = S_{AMN} + S_{BMNC}$ nên

$\frac{1}{2} a.h = \frac{1}{2} x(h - x) + \frac{1}{2} x(a + x)$

Hay: $a.h = x(a + h) \Rightarrow x = \frac{ah}{a + h}$

Vậy cạnh hình vuông MNPQ là $\frac{ah}{a + h}$

Bài tập áp dụng: khoảng 5 bài

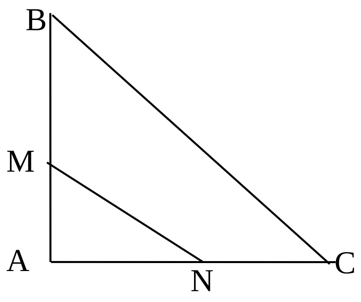
IV. BẤT ĐẲNG THỨC DIỆN TÍCH:

- Ta sử dụng hệ quả của bất đẳng thức Côsi: nếu hai số có một tổng không đổi thì tích của chúng lớn nhất khi hai số ấy bằng nhau.

- Để sử dụng các bất đẳng thức đại số ta đặt độ dài cần xác định là x biểu thị đại lượng cần tìm giá trị nhỏ nhất (hay giá trị lớn nhất) bằng một biểu thức có biến x rồi tìm điều kiện của x để biểu thức có giá trị nhỏ nhất (hay giá trị lớn nhất).

Ví dụ 1:

Cho tam giác ANC vuông tại A, AB = 4cm. Trên hai cạnh AB và AC lần lượt lấy các điểm M, N sao cho AM = CN. Xác định vị trí của M, N sao cho tứ giác BCMN có diện tích nhỏ nhất. Tính diện tích nhỏ nhất đó



Giải:

Đặt: $S_{BCMN} = S$; AM = CN = x

=> AN = 4 - x

S = S_{ABC} - S_{AMN}

$S = \frac{4.4}{2} - \frac{x(4-x)}{2} = 8 - \frac{x(4-x)}{2}$

S nhỏ nhất $\Leftrightarrow \frac{x(4-x)}{2}$ lớn nhất

$\Leftrightarrow \frac{x(4-x)}{2}$ lớn nhất

Vì x + (4 – x) = 4 (không đổi) nên x(4 – x) lớn nhất

$\Leftrightarrow$ x = 4 – x

$\Leftrightarrow$ x = 2 (hệ quả bất đẳng thức Côsi

Khi đó M và N lần lượt là trung điểm của AB và AC

$S_{\min} = 8 - \frac{2(4-2)}{2} = 6cm^2$

Ví dụ 2:

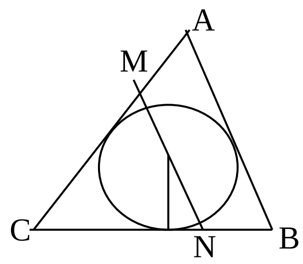
Cho đường tròn tâm O bán kính r nội tiếp trong tam giác ABC. Qua O vẽ đường thẳng cắt hai cạnh AC và BC lần lượt tạio M và N. Chứng minh $S_{CMN} \geq 2r^2$

Giải:

Đặt $S_{CMN} = S$

Ta có $S_{CMN} = S_{OCM} + S_{OCN} = \frac{1}{2}(MC + NC)r$

Theo bất đẳng thức Côsi:



$\frac{1}{2}(MC + NC) \geq \sqrt{CM.CN} \geq \sqrt{25}$

(Vì $S = \frac{1}{2}(MC + NC).\sin C \leq \frac{1}{2}CM.CN$)

$\Rightarrow S = \frac{1}{2}(MC + NC).r \geq \sqrt{2S}.r$

$\Rightarrow S^2 \geq 2S.r^2$

Dấu “=” xảy ra khi CM = CN hay $MN \perp OC$

Bài tập áp dụng: Khoảng 5 bài

V. BÀI TẬP VỀ DIỆN TÍCH VÀ CHỨNG MINH

Ví dụ 1:

Cho hình thang ABCD, đáy AB = 3cm, AD = 4cm, BC = 6cm, CD = 9cm. Tính diện tích hình thang

Giải

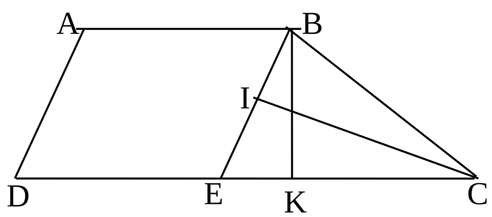
Vẽ $BE // AD$ ta có:

$S = \frac{3+9}{2}h = 6h$ (cm^2)

ΔCBE cân ở C

IC^2 = 36 – 4 = 32

$IC = 4\sqrt{2}$



$$S_{BCE} = \frac{4.4\sqrt{2}}{2} = 8\sqrt{2}$$

$$\Rightarrow h = BK = \frac{8\sqrt{5}.2}{6} = \frac{8\sqrt{2}}{3}$$

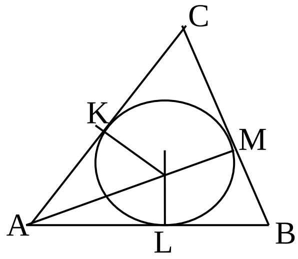
$$S_{ABCD} = 6h = 6.\frac{8\sqrt{2}}{3} = 16\sqrt{2}$$

Ví dụ 2:

Cho ΔABC có chu vi là 2p, cạnh BC = a, gọi góc $\widehat{BAC} = \alpha$, đường tròn nội tiếp tam giác ABC tiếp xúc cạnh AC tại K.

Tính diện tích ΔAOK

+ Giải



AK = AL; CK = CM; BM = BL

2 CM + 2 AK + 2 BM = 2p

AK = p – (BM + CM)

AK = p – a

$$\widehat{KAO} = \frac{\alpha}{2}$$

OK = (p - a)tan $\frac{\alpha}{2}$

$S_{AOK} = \frac{1}{2}AK.AO = \frac{1}{2}(p-a)^2 \tan\frac{\alpha}{2}$

* Bài tập áp dụng:

1. Cho Δ ABC có 3 góc nhọn, các đường cao AA', BB', CC' và trực tâm H.

Tính tổng: $\frac{HA'}{AA'} + \frac{HB'}{BB'} + \frac{HC'}{CC'}$

2. Một tam giác có độ dài các đường cao là các số nguyên và bán kính đường tròn ngoại tiếp bằng 1. Chứng minh tam giác đó đều.

3. Cho Δ ABC biết $\hat{A} = \alpha$, , $\hat{B} = \beta$, , $\hat{C} = \delta$, đường tròn nội tiếp tam giác có bán kính bằng r; P, Q, R là các tiếp điểm.

Tính diện tích tam giác PQR

4. Cho ΔABC. Trên cạnh AB lấy điểm M, trên cạnh AC lấy điểm N sao cho $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{1}{3}$. Gọi O là giao điểm của BN và CM. Gọi H, L lần lượt là chân đường vuông góc kẻ từ A, C tới đường thẳng BN.

a/ Chứng minh CL = 2 AH.

b/ Chứng minh: S_{BOC} = 2 S_{BOA}

Kẻ CE và BD vuông góc với AO. Chứng minh BD = CE.

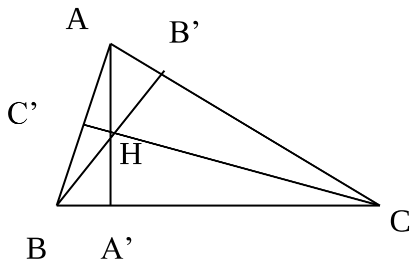
c/ Giả sử S_{ABC} = 30 cm^2, tính S_{AMON}.

5. Cho hình thang ABCD, đáy AB, O là giao điểm của hai đường chéo AC và BD.

a/ Chứng minh rằng: $S_{OAD} = S_{OBC}$.

b/ $S_{OAB}.S_{OCD} = (S_{OBC})^2$

HƯỚNG DẪN GIẢI



1. Ta có: $\dfrac{S_{HBC}}{S_{ABC}} = \dfrac{\frac{1}{2}HA'.BC}{\frac{1}{2}AA'.BC} = \dfrac{HA'}{AA'}$ (1)

Tương tự: $\dfrac{S_{HAB}}{S_{ABC}} = \dfrac{HC'}{CC'}$ (2)

$\dfrac{S_{HAC}}{S_{ABC}} = \dfrac{HB'}{BB'}$ (3)

Cộng (1), (2) và (3) ta được:

$$\frac{HA'}{AA'} + \frac{HB'}{BB'} + \frac{HC'}{CC'} = \frac{S_{HBC} + S_{HAB} + S_{HAC}}{S_{ABC}} = \frac{S_{ABC}}{S_{ABC}} = 1$$

2.

Đặt a = BC, b = AC, c = AB

Gọi x, y, z là độ dài các đường cao tương ứng với 3 cạnh a, b, c của tam giác.

Vì bán kính đường tròn nội tiếp bằng 1 nên x, y, z > 2

Giả sử: $x \geq y \geq z \geq 2$

Theo kết quả bài 1: $\Rightarrow \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{z} = 1 \leq \dfrac{3}{z}$

$\Rightarrow z \leq 3 \Rightarrow z = 3$

Từ: $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{z} = 1 \Rightarrow \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = \dfrac{2}{3}$ hay 3(x+y) = 2xy

$\Rightarrow$ (2x-3)(2y-3) = 9 = 3 . 3 = 9 . 1

$\Rightarrow$ x = y = 3 hoặc x = 6; y =2 (loại)

Vậy = y = z khi đó a = b = c

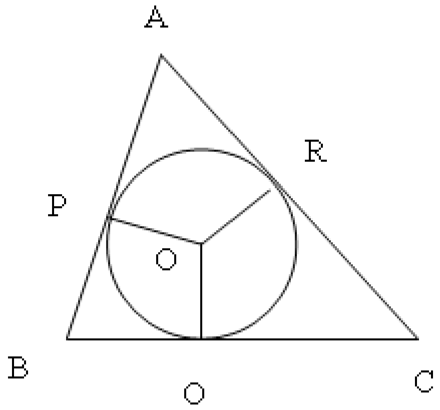
3.

OP = OQ = OR = r.

$S_{PQR} = S_{OPR} + S_{OPQ} + S_{OQR}$

$S_{PQR} = \dfrac{1}{2} r^2 \sin(180^0 - \alpha)$

$= \dfrac{1}{2} r^2 \sin \alpha$



$S_{ORQ} = \dfrac{1}{2} r^2 \sin \beta$

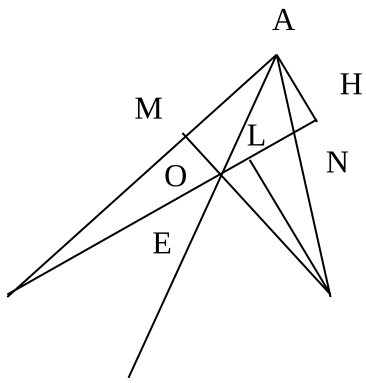
$S_{ORQ} = \dfrac{1}{2} r^2 \sin \delta$

Do đó $S_{PQR} = \dfrac{1}{2} r^2 (\sin \alpha + \sin \beta + \sin \delta)$

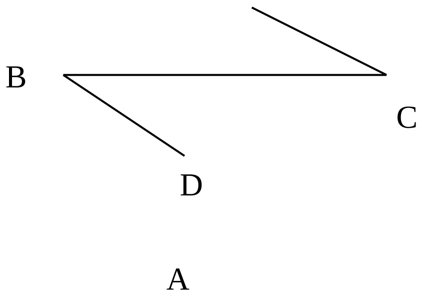
4.

a/ CN = 2 AN $\Rightarrow S_{BNC} = 2S_{BNA}$

$$\left.\begin{array}{l} S_{BNC} = 2\, S_{BNA} \\ BN chung \end{array}\right\} \Rightarrow CL = 2AH$$



b/ $\left.\begin{array}{l} S_{BOC} = \dfrac{1}{2}BO.CL \\ S_{BOA} = \dfrac{1}{2}BO.AH \\ CL = 2AH \end{array}\right\} \Rightarrow S_{BOC} = 2S_{BOA}$ (1)



Chứng minh tương tự

$S_{BOC} = 2S_{COA}$ (2)

T ừ (1) v à (2) $\Rightarrow$ $S_{BOA} = 2\ S_{COA}$ (3)

Kẻ CE $\perp$ AO, BD $\perp$ CE

Ta chứng minh được:

BD = CE

c/ Giả sử $S_{BOC} = 2a$ (cm^2) $\Rightarrow$ $S_{BOA} = a$ (cm^2), $S_{COA} = a$ (cm^2)

Ta tính được:

$S_{ABC} = 4a$ (cm^2) $\Rightarrow$ a = 3 cm^2

Ta lại có $S_{ONA} = S_{OMA} = \dfrac{1}{3}$ a= 1 (cm^2)

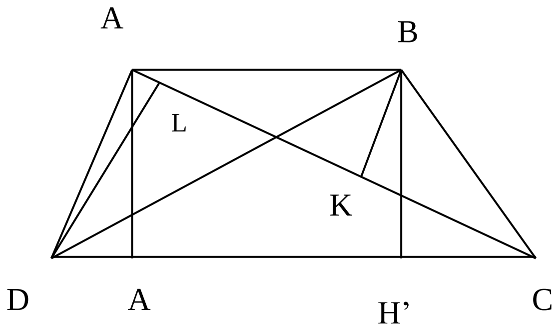
Vậy: $S_{OAMN} = 2$ cm^2

5.

a/ Kẻ đ ư òng cao AH v à BH’, ta c ó: AH = BH’

Ta có: $S_{ADC} = \dfrac{1}{2}AH.DC$

$S_{BDC} = \dfrac{1}{2}BH'.DC$



$\Rightarrow S_{ADC} = S_{BDC} \Rightarrow S_{ODA} = S_{OBC}$

b/ Kẻ đường cao BK của ΔABC, ta c ó:

$\dfrac{S_{OAB}}{S_{OBC}} = \dfrac{OA}{OC}$

Tương tự: $\dfrac{S_{OAD}}{S_{OCD}} = \dfrac{OA}{OC}$

$\Rightarrow \dfrac{S_{OAB}}{S_{OBC}} = \dfrac{S_{OAD}}{S_{OCD}} \Rightarrow (S_{OBC})^2 = S_{OAB}.S_{OCD}$ (Vì $S_{OBC} = S_{OAD}$)